

স্নাতক পাঠক্রম

(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — জুন, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠক্রম

(সাবসিডিয়ারি-১)

গণিত (প্রথম পত্র)

সময় : তিন ঘণ্টা

পূর্ণমান : ১০০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।

অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর

কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

১। যে-কোনো একটি ('ক' অথবা 'খ') প্রশ্নের উত্তর দিন : ১০

(ক) (i) আরোহী প্রণালীর (method of induction) সাহায্যে দেখান  
যে—

$$(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) \dots (\cos\theta_n + i \sin\theta_n) \\ = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$

এখান থেকে  $n \in \mathbb{N}$  -এর জন্য De Moivre-এর উপপাদ্যটি প্রমাণ করুন। ৩+২

P.T.O.

(ii) ম্যাট্রিক্স প্রণালীর সাহায্যে সমাধান করুন :

$$2x + 3y + z = 11, x + y + z = 6, 5x - y + 10z = 34 \quad ৫$$

(খ) (i) দেখান যে  $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = \frac{1}{x}$  যখন  $a > b > c > 0$   
সমীকরণের সকল বীজ বাস্তব। ৫

(ii) দেখান যে

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + 1 \right) \quad ৫$$

২। যে-কোনো একটি ('ক' অথবা 'খ') প্রশ্নের উত্তর দিন : ১০

(ক) (i)  $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  এবং  
 $C = \{3, 6, 9, 12\}$  হলে  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$   
সম্পর্কটির সত্যতা নিরূপণ করুন। ৫

(ii) এক (Unity)-এর ঘনমূলগুলি দিয়ে গঠিত সেটটি গুণ প্রক্রিয়ার  
সাহায্যে দল (group) গঠন করে কিনা পরীক্ষা করুন। ৫

(খ) (i) যদি  $R$  একটি রিং (ring) হয় এবং উহার  $a$  সদস্যটি Unity হয় তাহলে  
দেখান যে  $a$  সদস্য divisor of zero হবে না। ৫

(ii)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  এই ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মান (eigen value) এবং আইগেন  
ভেক্টরগুলি নির্ণয় করুন। ৩+২

৩। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন : ৬×৩=১৮

(ক) দেখান যে  $\tan\left(i \log \frac{x-iy}{x+iy}\right) = 2$  সমীকরণটি  $x^2 - y^2 = xy$   
পরাবৃত্তকে সূচিত করে। ৬

(খ) যদি  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  সমীকরণের একটি বীজ  
অপর বীজদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে  
 $p^3 + 8r = 4pq$  ৬

(3)

SMT-01

(গ) দেখান যে  $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$  ৬

(ঘ)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  ম্যাট্রিক্সটির র্যাঙ্ক (rank), ইনডেক্স (index)

এবং সিগনেচার (signature) নির্ণয় করুন। ৩+২+১

(ঙ)  $x^3 - 6x - 9 = 0$  সমীকরণটিকে Cardan-এর নিয়ম অনুযায়ী সমাধান করুন। ৬

(চ)  $x^3 + qx + r = 0$  সমীকরণের বীজগুলি  $\alpha, \beta, \gamma$  হলে

দেখান যে  $(\beta + \gamma)^{-1} + (\gamma + \alpha)^{-1} + (\alpha + \beta)^{-1} = \frac{q}{r}$  ৬

৪। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন : ৩×৪=১২

(ক) জটিল সংখ্যা (complex number)-এর লগারিদমের সংজ্ঞা দিন। ৩

(খ)  $x^3 = 1$  হলে দেখান যে

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+bx+cx^2) \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \quad ৩$$

(গ) ম্যাট্রিক্স  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$  হলে দেখান যে  $A^2 = A$  ৩

(ঘ) দেখান যে  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  একটি যুগ্ম পারমুটেশন এবং

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  একটি অযুগ্ম পারমুটেশন বিন্যাস। ৩

(ঙ) ম্যাট্রিক্স  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  হলে  $A^{-1}$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

P.T.O.

SMT-01

(4)

(চ) Descartes' নিয়ম অনুযায়ী  $3x^4 + 12x^2 + 5x - 4 = 0$  সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নিরূপণ করুন। ৩

(ছ) যদি জটিল সংখ্যার সেট  $C$  হয় তবে উহার যোগের ও গুণের একক (identity) সদস্য দুটি লিখুন এবং শূন্য নয় এমন একটি সদস্যের বিপরীত (inverse) সদস্য থাকলে তা নির্ণয় করুন। ৩

(জ) প্রমাণ করুন যে  $a$  এবং  $b$  একটি ক্ষেত্র (field)  $F$ -এর সদস্য হলে

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b) \quad ৩$$

বিভাগ — খ

৫। যে-কোনো একটি ('ক' অথবা 'খ') প্রশ্নের উত্তর দিন : ১০

(ক) (i)  $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ ,  $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$  এই রূপান্তরের সাহায্যে  $ax^2 + 2hxy + by^2$  রাশিমালাটি  $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$ -তে রূপান্তরিত হলে প্রমাণ করুন যে  $ab - h^2 = a'b' - h'^2$  ৫

(ii)  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  সরলরেখাদ্বয়ের একটি সরলরেখা  $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$  সরলরেখাদ্বয়ের একটি সরলরেখার সহিত লম্ব হলে দেখান যে,

$$(aa' - bb')^2 + 4(ah' + hb')(ha' + bh') = 0 \quad ৫$$

(খ) (i) প্রমাণ করুন যে,  $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$  সরলরেখাটি

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \text{ কণিককে স্পর্শ করবে যদি } (A - e)^2 + B^2 = 1 \text{ হয়।} \quad ৫$$

(ii)  $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y + 6 = 0$  কণিকের সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে (standard form) পরিবর্তিত করে উহার প্রকৃতি নিরূপণ করুন। ৫

৬। যে-কোনো একটি ('ক' অথবা 'খ') প্রশ্নের উত্তর দিন : ১০

(ক) (i) দেখান যে  $l + m + n = 0$  এবং  $l^2 + m^2 + n^2 = 0$  সম্পর্ক থেকে যে দুটি সরলরেখার দিককোসাইন নির্ণীত হবে তারা পরস্পরের সহিত লম্ব। ৫

- (ii)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  সমতলটি অক্ষত্রয়কে  $A, B, C$  বিন্দুতে ছেদ করেছে। যদি  $ABC$  বৃত্তের উপরিস্থিত  $P$  একটি চলমান বিন্দু হয় তবে দেখান যে  $OP$  (' $O$ ' মূলবিন্দু) সরলরেখাসমূহের দ্বারা উদ্ভূত শঙ্কুর সমীকরণ :

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)yz + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)zx + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)xy = 0 \quad ৫$$

- (খ) (i)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$  এবং  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$  সরলরেখাদুটির ন্যূনতম দূরত্ব (shortest distance) নির্ণয় করুন। ৫
- (ii)  $lx + my + nz + d = 0$  সমতলটি  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z = 0$  গোলককে স্পর্শ করার শর্ত নির্ণয় করুন। ৫

৭। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :  $৪ \times ২ = ৮$

- (ক)  $lx + my + n = 0$  সরলরেখার  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  উপবৃত্তের সাপেক্ষে মেরু (pole)-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। ৪
- (খ) দেখান যে  $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$  সরলরেখাদ্বয়ের কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ  $3x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$  ৪
- (গ)  $(r_1, \theta_1)$  বিন্দু থেকে  $r \cos(\theta - \alpha) = p$  সরলরেখার লম্বদূরত্ব নির্ণয় করুন। ৪
- (ঘ) একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যা অক্ষদ্বয়ের

$$x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2, \quad y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2$$

এই রূপান্তরের ফলে অপরিবর্তিত থাকে। ৪

৮। যে-কোনো একটি ('ক' অথবা 'খ') প্রশ্নের উত্তর দিন :  $৭ \times ১ = ৭$

- (ক) (i) একই বিন্দুগামী তিনটি সরলরেখার দিগকোসাইনগুলি  $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$  হলে দেখান যে উহারা একতলীয় হবে যদি

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ হয়।} \quad ৪$$

- (ii) একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করুন যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু, অক্ষের সমীকরণ  $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$  এবং অর্ধশীর্ষকোণ  $60^\circ$ । ৩

- (খ) (i)  $(-6, 4, 5)$  এবং  $(6, -2, 1)$  বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটি কোন্ বিন্দুতে  $zOx$  তলকে ছেদ করেছে তা নির্ণয় করুন। ৪
- (ii)  $x^2 + y^2 + z^2 - ax - 2y + 12z + 4 = 0$  এবং  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  গোলকদ্বয়  $a$ -এর কোনো বিশেষ মানের জন্য পরস্পরকে স্পর্শ করবে কি? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন। ৩

### বিভাগ — গ

৯। যে-কোনো একটি ('ক' অথবা 'খ') প্রশ্নের উত্তর দিন :  $৯ \times ১ = ৯$

- (ক) (i) দেখান যে  $3\vec{a} - 7\vec{b} - 4\vec{c}, 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$  ভেক্টর তিনটি একতলীয়। ৫
- (ii) ভেক্টর প্রণালীর সাহায্যে দেখান যে একটি ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু। ৪
- (খ) (i) একটি তলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন যা মূলবিন্দুগামী এবং  $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  ও  $2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$  ভেক্টরদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল। ৫
- (ii) দেখান যে  $A(2, 3, 4), B(1, 2, 3), C(4, 2, 3)$  বিন্দুত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। ৪

১০। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :  $৩ \times ২ = ৬$

- (ক) যদি  $ABC$  ত্রিভুজের  $BC, CA$  এবং  $AB$  বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে  $D, E$  এবং  $F$  হলে প্রমাণ করুন  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = 0$  ৩

(খ) যদি  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$  হয়, তবে দেখান যে  $\vec{a}$  এবং  $\vec{b}$  পরস্পরের উপর লম্ব। ৩

(গ)  $3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$  এবং  $2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$  এই উভয় ভেক্টরের সহিত লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় করুন। ৩

(ঘ) তিনটি ভেক্টর  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  সমতলীয় হবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত  $[\vec{\alpha} \vec{\beta} \vec{\gamma}] = 0$  প্রমাণ করুন। ৩

---