

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

প্রথম পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন : $১০ \times ২ = ২০$

১। (ক) ম্যাকলরিন (Maclaurin)-এর উপপাদ্যটি ল্যাগরাঞ্জের অবশেষরূপে বিবৃত করুন ও প্রমাণ করুন। ৬

(খ) দেখান যে $y = x^2 + 2ax + b$ বক্রে $x = \alpha$ এবং $x = \beta$ বিন্দুদ্বয়

সংযোগকারী জ্যা $x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সহিত

সমান্তরাল। ৪

২। (ক) যদি $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{যখন } x \leq 1 \\ ax^2 + bx, & \text{যখন } x > 1, \end{cases}$

হয় যখন a, b ধ্রুবক এবং যদি $f(x)$ অবকলনযোগ্য হয় তাহলে a ও b -এর মান নির্ণয় করুন। ৫

(খ) ৫-৪ সংজ্ঞার সাহায্যে দেখান যে $[a, b]$ অন্তরালে দুটি সন্তত অপেক্ষকের বিয়োগফল একই অন্তরালে একটি সন্তত অপেক্ষক। ৫

P.T.O.

৩। (ক) $f(x) = x(1 + \sin \log x^2)$, যখন $x \neq 0$ এবং $f(0) = 0$ হলে

$x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবকলনযোগ্য কিনা বিচার করুন। ৫

(খ) $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ হলে দেখান যে

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{-3}{(x + y + z)^2} \quad ৫$$

৪। (ক) $y = x^3 + 5x^2 + 6x$ বক্রেটির মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন। ৫

(খ) $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$ মধ্যমান

উপপাদ্যটিতে $a = 1$, $h = 3$ এবং $f(x) = \sqrt{x}$ হলে θ -এর মান নির্ণয় করুন। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন : $৬ \times ৩ = ১৮$

৫। দেখান যে a, b প্যারামিটার যুক্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তসমূহের

পরিস্পর্শক (envelope) $x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = c^{\frac{2}{5}}$, যখন c একটি ধ্রুবক এবং $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$. ৬

৬। কোনো বক্রের অসীমপথের সংজ্ঞা দিন।

$x^3 - 2x^2y + xy^2 + x^2 - xy + 2 = 0$ বক্রের অসীমপথগুলি নির্ণয় করুন। ৬

৭। যদি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের কোনো এক বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $lx + my = 1$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে $al^3 + 2alm^2 = m^2$. ৬

$$৮। f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)}, & \text{যখন } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{যখন } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

হলে $(0, 0)$ বিন্দুতে $f(x, y)$ সন্তত কিনা পরীক্ষা করুন এবং আরও দেখান যে $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ ৬

(3)

EMT-01

৯। $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^2 + 72x$ ফাংশনটির চরম ও অবম বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন এবং চরম ও অবম মানগুলি নির্ণয় করুন। ৬

১০। যদি $u = \sin^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ হয় তবে দেখান যে

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = \frac{1}{2} \tan u \left(\frac{1}{2} \sec^2 u - 1 \right) \quad ৬$$

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৩×৪=১২

১১। $p^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$ হলে দেখান যে $p + \frac{d^2 p}{d\theta^2} = \frac{a^2 b^2}{p^3}$ ৩

১২। দেখান যে $r^2 \theta = a^2$ এবং $r = e^{\theta^2}$ বক্রদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। ৩

১৩। $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$ অপেক্ষকটিতে $[-1, 1]$ অন্তরালে রোলার উপপাদ্য প্রয়োগ করা যাবে কিনা পরীক্ষা করুন। ৩

১৪। $y = \frac{1}{x^2 - 16}$ হলে y_n -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

১৫। দেখান যে $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = 1$. ৩

১৬। দেখান যে $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \neq \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$,

$$\text{যখন } f(x, y) = \left(\frac{y-x}{y+x} \right) \left(\frac{1+x}{1+y} \right). \quad ৩$$

P.T.O.

EMT-01

(4)

১৭। দেখান যে $r = \frac{2a}{1 + \cos \theta}$ অধিবৃত্তের পেডাল (pedal) সমীকরণ

$$p^2 = ar. \quad ৩$$

১৮। দেখান যে $\sum_{r=1}^n m_r (x - x_r)^2$ ফাংশনটি $x = \frac{\sum_{r=1}^n m_r x_r}{\sum_{r=1}^n m_r}$ মানের জন্য অবম। ৩

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

দ্বিতীয় পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

১০×২=২০

১। (ক) দেখান যে

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\theta}{n} + \sin \frac{2\theta}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\theta}{n} \right] = \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \quad ৫$$

$$(খ) \text{ মান নির্ণয় করুন : } \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} \, dx \quad ৫$$

২। (ক) $f(x, y)$ ফাংশনটি $R[a, b; c, d]$ আয়তক্ষেত্রে সংজ্ঞাত ও সীমাবদ্ধ

$$\text{হলে } \iint_R f(x, y) \, dx \, dy \text{ -এর সংজ্ঞা দিন।} \quad ৫$$

$$(খ) \text{ দেখান যে } \int_0^1 \int_0^{1-y^2} [(x-1)^2 + y^2] \, dx \, dy = \frac{44}{105} \quad ৫$$

P.T.O.

$$৩। (ক) \text{ সমাধান করুন : } x \frac{dy}{dx} - y = x\sqrt{x^2 + y^2} \quad ৫$$

(খ) $xp^2 - 2yp + ax = 0$ অবকল সমীকরণটির সাধারণ সমাধান ও সিঙ্গুলার সমাধান নির্ণয় করুন। ৫

$$৪। (ক) I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx \text{ হলে দেখান যে}$$

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} \quad ৫$$

(খ) যদি $\int_0^{\pi/2} x \sin^n x \, dx \, (n > 1)$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে

$$u_n = \frac{n-1}{n} u_{n-2} + \frac{1}{n^2} \quad ৫$$

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৬×৩=১৮

৫। $\iint_S x^2 \, dx \, dy$ -এর মান নির্ণয় করুন যেখানে S হল $x^2 - y^2 = 1$ ও

$x^2 + y^2 = 4$ বক্রদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চল যার মধ্যে শূন্য বিন্দু অর্থাৎ মূলবিন্দুটি বিদ্যমান। ৬

৬। $x^2 + y^2 = 2ax$ স্তম্ভক, xy -তল এবং আবর্তনজ অধিবৃত্তক $x^2 + y^2 = az$ -এর মধ্যবর্তী ঘন অংশের আয়তন ত্রিসমাকলের সাহায্যে নির্ণয় করুন। ৬

৭। $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \, dx$ এই অসমার্থ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন এবং সেখান থেকে

মন্তব্য করুন ইহা অপসারী না অভিসারী। ৬

(3)

EMT-02

৮। $r(1 + \cos \theta) = 2$ এই বক্রটির $\theta = 0$ থেকে $\theta = \frac{\pi}{2}$ মধ্যবর্তী চাপের
দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। ৬

৯। স্বাধীন চলের পরিবর্তন দ্বারা

$$(1 + x^2)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

অবকল সমীকরণটির সমাধান করুন। ৬

১০। $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \tan x \frac{dy}{dx} + 5y = 0$ অবকল সমীকরণটিকে স্বভাবী আকারে
(normal form) প্রকাশ করুন এবং সমাধান করুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন : ৩×৪=১২

১১। দেখান যে যেসমস্ত অধিবৃত্তের অক্ষ x -অক্ষ বরাবর এবং নাভি মূলবিন্দুতে
অবস্থিত তাদের অবকল সমীকরণ $yy_1^2 + 2xy_1 - y = 0$ ৩

১২। দেখান যে $y_2 - 2y_1 + y = 0$ অবকল সমীকরণটির দুটি সমাধান
 $y = e^x, y = xe^x$ এবং আরও দেখান যে সমাধান দুটি রৈখিক অনধীন। ৩

১৩। $(x^2 + y^2)dx - xy^2 dy = 0$ অবকল সমীকরণটিকে যথার্থ (exact)
অবকল সমীকরণে রূপান্তরের জন্য সমাকল গুণক (integrating fac-
tor) নির্ণয় করুন। ৩

১৪। মান নির্ণয় করুন : $\frac{1}{D^2 + 3D + 2} e^{e^x}$ ৩

১৫। দেখান যে $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ ৩

P.T.O.

EMT-02

(4)

১৬। দেখান যে $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$ ৩

১৭। $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ -এই অযথার্থ সমাকলটির মান কি নির্ণেয়? যুক্তি দিয়ে বিচার
করুন। ৩

১৮। সমাকলের সাহায্যে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। ৩

স্নাতক পাঠক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠক্রম

গণিত

তৃতীয় পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

১০×২=২০

১। (ক) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ n সংখ্যক ধনাত্মক সংখ্যা এবং $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ n সংখ্যক ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা। প্রমাণ করুন যে,

$$\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \geq \left(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}} \quad \&$$

(খ) a একটি অশূন্য (non-zero) জটিল (complex) সংখ্যা এবং z যে-কোনো একটি জটিল সংখ্যা হলে a^z -এর সংজ্ঞা দিন। a^z -এর মুখ্যমান কত? $(1-i)^{1+i}$ এর মুখ্যমান নির্ণয় করুন। $\&$

২। (ক) দেখান যে, অসীম সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা বিদ্যমান। $\&$

(খ) $\sqrt{14}$ কে ত্রমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন এবং দেখান যে $\frac{449}{120}$ এবং

$\sqrt{14}$ -এর মধ্যে মানের পার্থক্য $\frac{1}{9000}$ এর থেকে কম। $\&$

P.T.O.

৩। (ক) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$ সমীকরণটিকে এমন একটি সমীকরণে রূপান্তরিত করুন যার দ্বিতীয় পদটি অবর্তমান এবং তা থেকে সমীকরণটি সমাধান করুন। $\&$

(খ) প্রমাণ করুন যে, পূর্ণাধার মণ্ডলের (Integral domain) characteristic হয় শূন্য নতুবা মৌলিক সংখ্যা হবে। $\&$

৪। (ক) Ferrari-র পদ্ধতির সাহায্যে

$$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$$

সমীকরণটির সমাধান করুন। $\&$
(খ) চক্রজ দলের সংজ্ঞা দিন। প্রমাণ করুন যে, n ক্রমের একটি দল G চক্রজ দল হবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি G তে n ক্রমের একটি উপাদান থাকে। $\&$

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৬×৩=১৮

৫। যদি $\tan(\alpha + i\beta) = \tan\theta + i\sec\theta$ হয়,

যেখানে α, β, θ বাস্তব এবং $0 < \theta < \pi$,

$$\text{তাহলে দেখান যে, } e^{2\beta} = \cot \frac{\theta}{2} \text{ এবং } \alpha = n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \quad \&$$

৬। যদি x, y, z ধনাত্মক সংখ্যা এবং $x + y + z = 1$ হয়, তবে প্রমাণ করুন

$$\text{যে, } 8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{8}{27} \quad \&$$

৭। $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণটির বীজগুলি α, β, γ হলে, যে সমীকরণের

$$\text{বীজগুলি } (\alpha - \beta)^2, (\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2 \text{ তা নির্ণয় করুন।} \quad \&$$

৮। $(G, *)$ একটি দল এবং S_1, S_2 তার দুটি উপদল। প্রমাণ করুন যে, $(G, *)$ দলটির $S_1 \cup S_2$ একটি উপদল হবে যদি এবং একমাত্র যদি, $S_1 \subset S_2$ অথবা $S_2 \subset S_1$ হয়। $\&$

(3)

EMT-03

- ৯। প্রমাণ করুন যে, মৌলিক ক্রমের একটি দল চক্রজ হবে। এমন একটি সসীম দলের উদাহরণ দিন যা চক্রজ নয় কিন্তু যার সব প্রকৃত উপ-দলগুলি চক্রজ হবে। সঠিক যুক্তিসহ উত্তর দিন। ৬
- ১০। R একটি একসম উপাদান (Unity element) যুক্ত এবং শূন্যের জাজক ব্যতীত (without divisors of zero) একটি বিনিময়যোগ্য মণ্ডল (commutative ring)। R সসীম (finite) হলে প্রমাণ করুন যে, R একটি ক্ষেত্র (field)। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৩×৪=১২

- ১১। a এবং b অসমান বাস্তব সংখ্যা হলে,

$$\text{দেখান যে, } \cos\left(i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad ৩$$

- ১২। $x^3 + x + 1 = 0$ সমীকরণের বীজ তিনটি α , β , γ হলে $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1)$ এর মান নির্ণয় করুন। ৩

- ১৩। যদি $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$ দুটি বাইজেক্টিভ চিত্রণ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $g \circ f: A \rightarrow C$ চিত্রণটিও বাইজেক্টিভ। ৩

- ১৪। যদি A , B , C তিনটি অশূন্য সেট হয়,

$$\text{যাতে } A \cap B = A \cap C$$

$$\text{এবং } A \cup B = A \cup C \text{ হয়, তাহলে}$$

$$\text{প্রমাণ করুন যে, } B = C \quad ৩$$

- ১৫। G -একটি দল যাতে

$$(ab)^3 = a^3b^3 \text{ এবং } (ab)^5 = a^5b^5 \quad \forall a, b \in G ; \text{ প্রমাণ করুন যে, } G \text{ দলটি বিনিময়যোগ্য।} \quad ৩$$

- ১৬। $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ও $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ বিন্যাস দুটির

জন্য AB নির্ণয় করুন। AB যুগ্ম বিন্যাস কিনা তা নির্ণয় করুন। ৩

P.T.O.

EMT-03

(4)

- ১৭। যদি $x^n - 1 = 0$ সমীকরণটির একটি কাল্পনিক বীজ α হয়, যেখানে n মৌলিক, তা হলে দেখান যে,

$$(1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \dots (1 - \alpha^{n-1}) = n. \quad ৩$$

- ১৮। $G\{Z : Z \in C, |Z|=1\}$ যেখানে C সমস্ত জটিল রাশির সেট। দেখান যে, C তে প্রচলিত গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে G একটি বিনিময়যোগ্য দল। ৩

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

চতুর্থ পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

১০×২=২০

- ১। (ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব রেখাগুলি সমবিন্দু। ৫
- (খ) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন, যদি ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $A(1,3,2)$, $B(2,-1,1)$ এবং $C(-1,2,3)$ হয়। ৫
- ২। (ক) O বিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর যদি \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} হয়, তবে দেখান যে,
 $(\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$ ভেক্টরটি, ABC তলের উপর লম্ব হবে। ৫
- (খ) একটি সরলরেখা $(2, -1, 1)$ ও $(7, -3, 4)$ বিন্দুগামী। একটি সমতলে তিনটি বিন্দু হল $(2, 1, -3)$, $(3, 0, 1)$ ও $(4, -1, 2)$ । ভেক্টর পদ্ধতিতে ওই সরলরেখা এবং ওই সমতলের ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন। ৫

P.T.O.

- ৩। (ক) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ভেক্টর তিনটির জন্য $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ হলে, প্রমাণ করুন যে, ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

p -এর কোন্ মানের জন্য $\vec{i} + 2\vec{j} + p\vec{k}$, $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ এবং $3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে? ৩+২

- (খ) যদি $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

এবং $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ (ধ্রুবক ভেক্টর) হয়, তবে দেখান যে,

$$(i) \operatorname{div}(\vec{r} \times \vec{a}) = 0$$

$$(ii) \operatorname{curl}(\vec{r} \times \vec{a}) = -2\vec{a} \quad ২+৩$$

- ৪। (ক) $\vec{\alpha}$ ও $\vec{\beta}$ ভেক্টরদুটি স্কেলার চল t -এর উপর নির্ভরশীল। প্রমাণ

$$\text{করুন যে, } \frac{d}{dt}(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \times \frac{d\vec{\beta}}{dt} + \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \times \vec{\beta}.$$

$$\text{এর সাহায্যে দেখান যে, } \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad ৩+২$$

- (খ) স্টোকের উপপাদ্যের সাহায্যে

$$\int_C (xe^x dx + ye^y dy + ze^z dz) \text{-এর মান নির্ণয় করুন, যখন } C \text{ বক্রের সমীকরণ } x^2 + y^2 = 4, z = 3 \quad ৫$$

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৬×৩=১৮

- ৫। $PQRS$ একটি চতুস্তলক যার শীর্ষবিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(-5, -4, 8)$, $(2, 3, 1)$, $(4, 1, 2)$ এবং $(6, 3, 7)$ । P বিন্দু থেকে QRS সমতলটির উপর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করুন। ৬
- ৬। $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{\alpha}$ এবং $\vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{\beta}$ এই দুটি নৈক্যতলীয় সরলরেখার (skew lines) মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করুন, যেখানে s, t দুটি স্কেলার এবং $\vec{r}_1, \vec{\alpha}, \vec{r}_2, \vec{\beta}$ ভেক্টরগুলি হল যথাক্রমে $(1, -2, 3)$, $(2, 1, 1)$, $(-2, 2, -1)$ এবং $(-3, 1, 2)$ ৬

(3)

EMT-04

- ৭। দেখান যে, যে-কোনো ভেক্টর \vec{r} কে তিনটি অসমতলীয় ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ সমন্বিত নিম্নের রাশির আকারে প্রকাশ করা যায় :

$$\vec{r} = \frac{[\vec{r} \vec{b} \vec{c}] \vec{a} + [\vec{r} \vec{c} \vec{a}] \vec{b} + [\vec{r} \vec{a} \vec{b}] \vec{c}}{[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]},$$

যেখানে $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ ইত্যাদি প্রচলিত অর্থ বহন করে। ৬

- ৮। $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 7 = 0$ গোলকটির উপর (1, 0, 2) বিন্দুতে স্পর্শকতল ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৬

- ৯। গ্রীনের উপপাদ্যের সাহায্যে $\int_C \{(x - y^2) dx + (y + \sin x) dy\}$ সমাকলনটির মান নির্ণয় করুন, যখন C বক্রটি xy সমতলে একটি আয়তক্ষেত্র যার কৌণিক বিন্দুগুলি

$$(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (0, 1). \quad ৬$$

- ১০। ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে দেখান যে, যে-কোনো ত্রিভুজের যে-কোনো একটি কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে কোণটির ধারক বাহুদুটির অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন : ৩×৪=১২

- ১১। 15 এককের একটি বল $\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ভেক্টরের দিকে ক্রিয়াশীল এবং তা $(2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ বিন্দু দিয়ে যায়। $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ বিন্দুর চারদিকে বলাটির ভ্রামক নির্ণয় করুন। ৩

- ১২। যদি $\vec{a} = (-2, -2, 4)$, $\vec{b} = (-2, 4, -2)$ এবং $\vec{c} = (4, 2, -2)$ হয়, তবে $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ -এর মান নির্ণয় করুন এবং এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিন।

২+১

P.T.O.

EMT-04

(4)

- ১৩। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। ৩

- ১৪। ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, ABC ত্রিভুজে, $c = a \cos B + b \cos A$, যেখানে প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থ বহন করে। ৩

- ১৫। একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ এবং $3\vec{k} - 2\vec{j}$ বিন্দুগামী। ৩

- ১৬। প্রমাণ করুন যে, $(-2, 3, 5)$, $(1, 2, 3)$ ও $(7, 0, -1)$ ভেক্টরগুলি সমরেখ। ৩

- ১৭। $\vec{f}(x, y, z) = (x + y^2)\vec{i} + (ay + z^2)\vec{j} + (az + x^2)\vec{k}$ ভেক্টরটি solenoidal হলে a -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

- ১৮। $\phi(x, y, z) = x^3 y^3 z^3$ হলে, $\text{div}(\text{grad } \phi)$ নির্ণয় করুন। ৩

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

পঞ্চম পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

১০×২=২০

- ১। (ক) বিপ্রতিসম নির্ণায়কের (skew symmetric determinant) সংজ্ঞা দিন। প্রমাণ করুন যে, প্রতিটি 4 মাত্রার বিপ্রতিসম নির্ণায়কের মান হবে একটি পূর্ণবর্গ। ৫

(খ) প্রমাণ করুন যে,

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+x^6+x^8$$

৫

P.T.O.

- ২। (ক) A একটি n মাত্রার বর্গাকার ম্যাট্রিক্স।

প্রমাণ করুন যে, $A \cdot \text{Adj } A = \text{Adj } A \cdot A = \det A \cdot I_n$, যেখানে I_n , n মাত্রার identity ম্যাট্রিক্স। ৫

(খ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সগুলির গুণফল

আকারে প্রকাশ করুন এবং এর থেকে A^{-1} নির্ণয় করুন। ৫

- ৩। (ক) বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্র R -এর উপর A, B এমন দুটি ম্যাট্রিক্স দেওয়া আছে যাতে AB সংজ্ঞাত হয়। প্রমাণ করুন যে,
 $\text{rank}(AB) \leq \min[\text{rank } A, \text{rank } B]$ ৫

- (খ) দেখান যে, λ -এর একমাত্র বাস্তবমান ৬-এর জন্য নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর অশূন্য (non-zero) সমাধান থাকবে এবং সমীকরণগুলোর সমাধান করুন :

$$x + 2y + 3z = \lambda x$$

$$3x + y + 2z = \lambda y$$

$$2x + 3y + z = \lambda z$$
 ৫

- ৪। (ক) Cayley-Hamilton-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করুন।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ হলে}$$

- (i) A -এর আইগেন মানগুলি নির্ণয় করুন।

- (ii) A^{-1} নির্ণয় করুন। ৫

- (খ) $xy + 2yz + 2zx$ এই দ্বিঘাত রূপকে normal আকারে পরিবর্তিত করুন এবং ইহার মাত্রা ও প্রকৃতি নির্ধারণ করুন।
(x, y, z বাস্তবরাশি) ৫

(3)

EMT-05

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৬×৩=১৮

৫। a, b, c অশূন্য বাস্তব সংখ্যা হলে, দেখান যে,

$$\begin{bmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{bmatrix} = 2(ab+bc+ca)^3 \quad \text{৬}$$

৬। A ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় করুন, যেখানে

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

এর সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান করুন :

$$3x + y + z = 5$$

$$4x + 2y - z = 5$$

$$7x + 3y + z = 11 \quad \text{৬}$$

৭। একটি বাস্তব ভেক্টর দেশ V তে দুটি ভেক্টর α, β -এর আভ্যন্তরীণ গুণন (α, β) -এর সংজ্ঞা দিন। প্রমাণ করুন যে, n মাত্রাবিশিষ্ট ইউক্লিডীয় ভেক্টর দেশে n সংখ্যক অশূন্য অর্থোগোনাল ভেক্টরের সেট একটি বনিয়াদ। ৬

৮। দেখান যে, $\{(1, 2, 2), (1, -1, 2), (1, 0, 1)\}$ ভেক্টর তিনটি ইউক্লিডীয় দেশ E^3 -এর একটি বনিয়াদ। প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি থেকে Gram Schmidt পদ্ধতির সাহায্যে E^3 -এর একটি অর্থোনিরমাল বনিয়াদ নির্ণয় করুন। ৬

৯। এমন একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স P নির্ণয় করুন যাতে $P^{-1}AP$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স হয়, যেখানে

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{৬}$$

P.T.O.

EMT-05

(4)

১০। দেখান যে, নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত অপেক্ষক $f: R^3 \rightarrow R^3$ একটি রৈখিক অপেক্ষক, যেখানে

$$f(x, y, z) = (-3x + 3y - 2z, 6y - 3z, x - y + 2z), (x, y, z) \in R^3.$$

ক্রমসংবদ্ধ বনিয়াদ $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ -এর পরিপ্রেক্ষিতে রৈখিক অপেক্ষক f -এর ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৩×৪=১২

১১। প্রমাণ করুন যে, একটি ভেক্টর দেশ V -এর দুটি উপ-দেশ-এর ছেদ হবে একটি উপ-দেশ। ৩

১২। প্রমাণ করুন যে, V ভেক্টর দেশের $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ যদি একটি বনিয়াদ হয়, তাহলে $\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}$ সেটটিও অপর একটি বনিয়াদ গঠন করে। ৩

১৩। $W = \{(x, y, z) \in R^3 : 2x - 3y + z = 0\}$ হলে, দেখান যে, R^3 দেশে W একটি উপ-দেশ। W -এর একটি বনিয়াদ নির্ণয় করুন। ৩

১৪। যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখান যে, A^2 ম্যাট্রিক্সটির আইগেন

মানসমূহ সতত বাস্তব। ৩

১৫। দেখান যে,

$$\begin{vmatrix} c^2 + a^2 & a^2 & c^2 \\ a^2 & a^2 + b^2 & b^2 \\ c^2 & b^2 & b^2 + c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix}^2 \quad \text{৩}$$

১৬। $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের α, β, γ বীজ তিনটি সমান্তর শ্রেণিতে

থাকলে $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় করুন। ৩

১৭। যদি A ও B এমন দুটি ম্যাট্রিক্স হয়, যাতে $AB = A$ এবং $BA = B$ হয়, তাহলে দেখান যে, A, B ম্যাট্রিক্সদুটি idempotent. ৩

১৮। প্রদত্ত $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং T, R^2 দেশে একটি রৈখিক রূপান্তর যাতে করে $T(V) = AV$ যেখানে V একটি স্তম্ভ ভেক্টর। একক ভেক্টরদ্বয় $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ সাপেক্ষে T -এর ম্যাট্রিক্স আকার নির্ণয় করুন। ৩

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

ষষ্ঠ পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

১০×২=২০

১। (ক) প্রমাণ করুন যে অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণনের ফলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। ৫

(খ) $ax + by + c = 0$ সরলরেখা যে যুগ্ম সরলরেখার একটি কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তার একটির সমীকরণ $lx + my + n = 0$ হলে দেখান যে অন্যটি হবে

$$(lx + my + n)(a^2 + b^2) - 2(al + bm)(ax + by + c) = 0. ৫$$

২। (ক) $x + 4y = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখাগুলি নির্ণয় করুন যারা $x^2 + 4xy + 3y^2 - 5x - 6y + 3 = 0$ কণিকটিকে স্পর্শ করে। ৫

P.T.O.

(খ) যদি $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ কণিকের নাভিগামী জ্যা PQ অক্ষের সাথে α

কোণে নত থাকে তাহলে প্রমাণ করুন যে P এবং Q বিন্দুতে

$$\text{স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ} = \tan^{-1} \frac{2e \sin \alpha}{1 - e^2} ৫$$

৩। (ক) যদি $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$ তিনটি সমবিন্দু সরলরেখার দিগনির্দেশক অনুপাত (direction ratio) হয় তাহলে দেখান সরলরেখাগুলির সমতলীয় হবে যদি

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0 ৫$$

(খ) যদি $P(a, b, c)$ বিন্দু থেকে অক্ষ-তলগুলির উপর যথাক্রমে PL, PM, PN লম্ব টানা হয় তাহলে দেখান যে LMN সমতলের সমীকরণ হবে

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2. ৫$$

৪। (ক) $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0$ সরলরেখাটি এমন একটি সমতলে অবস্থিত যা

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1, y = 0 \text{ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল। দেখান যে}$$

$$\text{সমতলের সমীকরণ হবে } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + 1 = 0 ৫$$

(খ) এমন একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $(2, 1, -1)$ বিন্দুগামী এবং $x - y + z = 1$ ও $3x + 4y - 2z = 0$ তলদুটির উপর লম্ব। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৬×৩=১৮

$$৫। 7x^2 + y^2 + z^2 + 16yz + 8zx - 8xy + 2x + 4y - 40z - 14 = 0$$

সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে রূপান্তরিত করুন এবং কনিকয়েডটির প্রকৃতি নির্ধারণ করুন। ৬

- ৬। $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ কণিকের উপর অবস্থিত P ও Q বিন্দুর নতিকোণ $\alpha - \beta$ ও $\alpha + \beta$ হলে PQ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৬
- ৭। যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখাদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুটি বাহু এবং $lx + my = 1$ সরলরেখাটি সামান্তরিকটির একটি কর্ণ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে, তার অপর কর্ণের সমীকরণ হবে $y(bl - hm) = x(am - hl)$. ৬
- ৮। যদি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ উপবৃত্তটির তিনটি অনুবন্ধী ব্যাসার্ধ OP, OQ, OR হয় তবে প্রমাণ করুন যে PQR সমতল দ্বারা উপবৃত্তটির ছেদের কেন্দ্রটির সম্ভাব্যপথের সমীকরণ হবে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$. ৬
- ৯। একটি সমতল নির্দিষ্ট বিন্দু (a, b, c) দিয়ে যায় এবং অক্ষত্রয়কে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখান যে $OABC$ গোলকের কেন্দ্রের সম্ভাব্যপথের সমীকরণ হবে $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$. ৬
- ১০। অক্ষত্রয়কে জনক হিসাবে ধারণ করে এমন একটি শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন : ৩×৪=১২

- ১১। $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপর $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ করুন $t_2 = -t_1 - 2/t_1$. ৩
- ১২। দেখান যে $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্তের বহিঃস্থ $(6, 5)$ বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শবিন্দুগ জ্যা (chord of contact)-এর সমীকরণ $8x + 15y = 12$ ৩

- ১৩। $\frac{14}{r} = 3 - 8 \cos \theta$ কণিকের উপর যে বিন্দুগুলির লম্বদূরক (radius vector) ২ একক তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। ৩
- ১৪। অক্ষত্রয়কে $\tan^{-1} \frac{1}{2}$ কোণে আবর্তিত করলে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যার পুরোনো স্থানাঙ্ক $(-2, 4)$. ৩
- ১৫। $(3, 3, 5)$ ও $(5, 4, 3)$ বিন্দুদ্বয় সংযোগকারী সরলরেখাংশের $(2, -1, 4)$ ও $(0, 1, 5)$ সংযোগকারী সরলরেখার উপর লম্ব অভিক্ষেপ কত? ৩
- ১৬। O বিন্দুটি মূলবিন্দু এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (a, b, c) হলে দেখান যে P বিন্দুগামী এবং OP -এর সহিত লম্ব সমতলের সমীকরণ $ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$. ৩
- ১৭। দেখান যে $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ সরলরেখাটি সর্বতোভাবে $2x + 4y - 3z = 1$ সমতলের উপর অবস্থিত। ৩
- ১৮। দেখান যে $26x^2 + 20y^2 + 10z^2 - 4yz - 16zx - 36xy + 52x - 36y - 16z + 25 = 0$ কোয়াদ্রিকটির একটি বহুকেন্দ্রীয় রেখা আছে। ৩

স্নাতক পাঠ্যক্রম

(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

সপ্তম পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

১০×২=২০

১। (ক) প্রমাণ করুন যে $\{x_n\}$ ক্রমটি l -এর প্রতি অভিসারী হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\{x_n\}$ -এর প্রত্যেক উপক্রম l -এর প্রতি অভিসারী হয়।

৫

(খ) যদি একটি ক্রম $\{x_n\}$ -এর জন্য $x_n \rightarrow l$ যখন $n \rightarrow \infty$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n+1} = l \quad ৫$$

২। (ক) যদি সকল $n \in N$ -এর জন্য $x_n > 0$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_{n+1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad ৫$$

(খ) দেখান যে $(0, 1)$ মুক্ত অন্তরালে

$$\sigma = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right) : n = 2, 3, \dots \right\}$$

এই মুক্ত অন্তরালের সেট আবরণ (cover) করে, কিন্তু σ -এর কোনো সসীম উপসেট নাই যা $(0, 1)$ কে আবরণ করে। ৫

৩। (ক) $f(x) = \sqrt{x} \cos \frac{1}{x}$ যখন $x \neq 0$ এবং $f(0) = 0$ হলে প্রমাণ করুন $[0, 1]$ অন্তরালে $f(x)$ সীমিত ভেদযুক্ত নয়। ৫

(খ) $\log_e x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ ধরে প্রমাণ করুন যে

$$\frac{x}{1+x} < \log_e(1+x) < x,$$

যখন $x > -1$ এবং $x \neq 0$. ৫

৪। (ক) অন্তর্নিহিত অপেক্ষক (implicit function) $F(x, y) = 0$ -এর জন্য existence উপপাদ্যটি বিবৃত করুন।

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ -এর জন্য উক্ত উপপাদ্যটি কার্যকরী কিনা বিচার করুন। ৫

(খ) যদি t -এর ত্রিঘাত সমীকরণ $\frac{x}{a+t} + \frac{y}{b+t} + \frac{z}{c+t} = 1$ -এর তিনটি

বীজ α, β, γ হয় তবে দেখান যে

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = - \frac{(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)}{(b - c)(c - a)(a - b)} \quad ৫$$

(3)

EMT-07

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৬×৩=১৮

৫। যদি (i) অন্তত একটি মান $c \in [a, b]$ -এর জন্য $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ অভিসারী,

(ii) প্রত্যেক $f_n(x)$ অপেক্ষক $[a, b]$ -এর উপর অবকলনযোগ্য

এবং (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ শ্রেণিটি একই অন্তরাল $[a, b]$ -এর উপর $g(x)$ তে সুষমভাবে অভিসারী হয়,

তাহলে প্রমাণ করুন যে সকল $x \in [a, b]$ -এর জন্য $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ শ্রেণিটিও কোনো একটি অপেক্ষক $s(x)$ -তে অভিসারী হবে এবং $s'(x) = g(x)$ হবে।

৬। $f: A \rightarrow B$ ফাংশনটি $A = [a, b]$ অন্তরালে যথাযথভাবে (strictly) ক্রমবর্ধমান, সন্তত, $f(a) = \alpha$ এবং $f(b) = \beta$ হলে প্রমাণ করুন যে $[\alpha, \beta]$ অন্তরালে f^{-1} ফাংশনটি যথাযথভাবে ক্রমবর্ধমান ও সন্তত হবে।

৭। দেখান যে $\int_1^3 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+n^2x^2} \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \log \left(\frac{1+9n}{1+n} \right)$ ।

৮। দেখান যে $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$ ঘাত শ্রেণিটি $|x| < 1$ এর জন্য পরমভাবে এবং সুষমভাবে অভিসারী এবং সেখান থেকে দেখান যে

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \dots \text{ যখন } |x| < 1$$

৯। দেখান যে $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 9} + \dots$ শ্রেণিটি অপসারী।

১০। $f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2 + 1}, n \in N$ হলে দেখান যে $[0, 1]$ অন্তরালে $\{f_n(x)\}$

ক্রমটি সুষমভাবে অভিসারী নয়।

P.T.O.

EMT-07

(4)

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৩×৪=১২

১১। দেখান যে $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ফাংশনটি $(0, 1)$ অন্তরালে সুষমভাবে সন্তত নয়।

১২। $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right), (n = 1, 2, 3, \dots)$ হলে $\lim x_n$ এবং $\overline{\lim} x_n$ নির্ণয় করুন।

১৩। $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ শ্রেণির অভিসারী ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

১৪। $x_n = \frac{n}{n^2 + 1}, (n = 1, 2, 3, \dots)$ হলে $\sup \{x_n\}$ এবং $\inf \{x_n\}$ নির্ণয় করুন।

১৫। দেখান যে $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/2}$ শ্রেণিটি অভিসারী। ইহা পরমভাবে অভিসারী কিনা পরীক্ষা করুন।

১৬। যদি $f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ অন্তরালে ক্রমবর্ধমান হয় তাহলে দেখান যে

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$$

১৭। যদি $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ হয় তবে দেখান যে $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |l|$

১৮। দেখান যে $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^3 + \dots$ শ্রেণিটি অভিসারী।

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

অষ্টম পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

১০×২=২০

- ১। (ক) ফুরিয়ার শ্রেণির অভিসারিত্বের ডিরিকলেট এর শর্তগুলি বিবৃত করুন।
নিম্নে সংজ্ঞাত 2π পর্যায়ভুক্ত পর্ববৃত্ত অপেক্ষক f -এর ফুরিয়ার শ্রেণি নির্ণয় করুন

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$x = \pm \pi$ বিন্দুতে শ্রেণিটির যোগফল নির্ণয় করুন। ৫

- (খ) $(0, 1)$ অন্তরালে একটি অপেক্ষক f নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞাত।

$$f(x) = (-1)^{n+1} n(n+1), \text{ যখন } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$$

n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা, দেখান যে $\int_0^1 f(x) dx$ অভিসারী নয়। ৫

P.T.O.

- ২। (ক) যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a, b]$ অন্তরালে রীম্যান সমাকলনযোগ্য এবং এমন একটি ধনাত্মক ধ্রুবক M আছে যে সকল $b \geq a$ -এর জন্য

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq M \text{ হয়, দেখান যে } \int_a^\infty f(x) dx \text{ ও } \int_a^\infty |f(x)| dx$$

উভয়ই অযথার্থ সমাকলন হিসাবে অভিসারী। ৫

- (খ) সমাকলনের মধ্যে অন্তরকলন প্রয়োগ পূর্বক প্রমাণ করুন যে

$$\int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\pi} \sin \theta \cos^{-1}(\cos \alpha \operatorname{cosec} \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \\ = \frac{\pi}{2} (1 - \cos \alpha); 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad ৫$$

- ৩। (ক) $[a, b]$ অন্তরালে সংজ্ঞাত দুটি অপেক্ষক f ও g উভয়ই ওই অন্তরালে সীমাবদ্ধ ও রীম্যান সমাকলনযোগ্য। ওই অন্তরালে প্রত্যেকটি x এর জন্য $f(x) \geq g(x)$ এবং $[a, b]$ অন্তরালে এমন একটি বিন্দু c বর্তমান যেখানে f ও g উভয়ই সন্তত এবং $f(c) > g(c)$.

$$\text{প্রমাণ করুন যে } \int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

$$\text{এর থেকে দেখান যে } -\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{x^3 \cos 5x}{2+x^2} dx < \frac{1}{2} \quad ৬$$

- (খ) $[a, b]$ অন্তরালে f একটি সন্তত অপেক্ষক। দেখান যে এমন একটি

$$\text{বিন্দু } c \in [a, b] \text{ আছে যার জন্য } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \quad ৪$$

- ৪। (ক) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2}$ শ্রেণিটির অভিসরণ পরীক্ষা করুন। ৫

$$\text{(খ) প্রমাণ করুন যে } \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} (1 - e^{-xy}) dx \\ = \log(1+y), \quad y > -1. \quad ৫$$

(3)

EMT-08

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৬×৩=১৮

৫। অ্যাবেল উপপাদ্যটি ব্যবহার করে $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ শ্রেণিটির মান নির্ণয় করুন।

৬। $a + b > 0$ হলে দেখান যে $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}} = \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}$

৭। প্রমাণ করুন যে $\int_a^{\pi/2} (\cos x)^l (\sin x)^m dx$ সমাকলনটি অভিসারী যদি এবং একমাত্র যদি $l > -1, m > -1$ হয়।

৮। যদি $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, [a, b]$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে $\phi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$ এর দ্বারা সংজ্ঞায়িত অপেক্ষক $\phi, [a, b]$ অন্তরালে সন্তত হবে। $[a, b]$ অন্তরালে f সন্তত হলে, প্রমাণ করুন ওই অন্তরালে $\phi' = f$ হবে।

৯। দেখান যে $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}$ অভিসারী নয়, কিন্তু এর কশি মুখ্যমান আছে।

১০। অসীম শ্রেণির অভিসরণের কোশির সাধারণ তত্ত্ব প্রয়োগ করে দেখান যে

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \text{ অসীম শ্রেণিটি অভিসারী।}$$

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৩×৪=১২

১১। প্রমাণ করুন যে $\int_0^{\infty} \frac{(1-e^{-x})\cos x}{x^2} dx$ সমাকলনটি $a > 0$ হলে অভিসারী।

P.T.O.

EMT-08

(4)

১২। $\int_0^{\infty} f(x) dx$ -এর অভিসরণের μ - পরীক্ষাটি ব্যাখ্যা করুন।

১৩। $(0, \infty)$ অন্তরালে f একটি সন্তত অপেক্ষক এবং $\lim_{x \rightarrow \infty} xPf(x) = A$;

প্রমাণ করুন যে $P > 1$ হলে $\int_0^{\infty} f(x) dx$ অভিসারী।

১৪। $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq 2\pi$ অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ার শ্রেণিতে বিস্তৃত করুন।

১৫। দেখান যে $\int_0^{\infty} \frac{x^c}{c^x} dx, (c > 1) = \frac{\Gamma(c+1)}{(\log c)^{c+1}}$

১৬। দেখান যে $\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x dx}{(a + b \cos x)^n}, (a^2 > b^2)$

$$= \frac{2^{n-1}}{(a^2 - b^2)^{n/2}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

১৭। $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^n$ একটি ঘাত, শ্রেণি এবং

$\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = \frac{1}{R} > 0$. দেখান যে $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ শ্রেণিটি

$-S \leq x \leq S$ অন্তরালে সম অভিসারী যেখানে $0 < S < R$.

১৮। দেখান যে $\int_0^{\infty} e^{-xy} dx$ অযথার্থ সমাকলনটি $1 \leq y \leq 2$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

নবম পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

- ১। একটি কণার অবমন্দিত প্রণোদিত দোলন-এর অবকল সমীকরণটি উল্লেখসহ সমাধান করুন। বিভিন্ন ক্ষেত্রে বলের কেন্দ্রবিন্দু থেকে কণাটির দূরত্ব কীরূপ হবে তা বিস্তারিত আলোচনা করুন। ১০

অথবা

একটি কণার উপর একটি কেন্দ্রীয় বিকর্ষী বল (repulsive force) $m\mu \div (\text{দূরত্ব})^3$ ক্রিয়াশীল। কণাটিকে ‘a’ দূরত্বে অবস্থিত অভিদূরক বিন্দু থেকে “v” বেগে ক্ষেপণ করা হল। প্রমাণ করুন যে বস্তুকণার গতিপথের সমীকরণ হবে $r \cos p\theta = a$ এবং ওই কণাটি t সময়ে কেন্দ্রে উৎপন্ন

$$\text{কোণ} = \frac{1}{p} \tan^{-1} \left(\frac{pv}{a} t \right), \text{ যেখানে } p^2 = \frac{a^2 v^2 + \mu}{a^2 \sqrt{2}} \quad ১০$$

- ২। দ্বিমাত্রিক চলমান কোনো দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তির সমীকরণ নির্ণয় করুন। প্রমাণ করুন যে দ্বিমাত্রিক তলে চলমান কোনো বস্তুর গতিশক্তি, সরলরেখায় চলমান গতিশক্তি ও ঘূর্ণনজনিত গতিশক্তি, এই দুটি গতিশক্তির যোগফলের সমান। ১০

P.T.O.

অথবা

একটি সরু সুতোর দুই প্রান্তে দুইটি ভর M ও M' (M > M') কে বেঁধে সুতোটিকে স্থির কেন্দ্রে, m ভরবিশিষ্ট একটি অমসৃণ কপিকলের উপর ঝুলিয়ে দেওয়া হল। সুতোটি কপিকলের উপর পিছলে যেতে না পারলে দেখান যে M ভরটি

$$\frac{M - M'}{M + M' + (mk^2/a^2)} g$$

ত্বরণে নামতে থাকবে। যেখানে ‘a’ কপিকলের ব্যাসার্ধ, k উহার ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ, g অভিকর্ষজ ত্বরণ। ১০

- ৩। ‘m’ ভরবিশিষ্ট একটি স্থিতিস্থাপক গোলক ‘h’ উচ্চতা থেকে একটি স্থির

অনুভূমিক সমতলের উপর পড়ে, ধাক্কা খেয়ে এরপর যদি $\frac{1}{9}h$ উচ্চতায় ওঠে তবে (অ) স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক (আ) উৎপন্ন ঘাতবল এবং (ই) গতিশক্তির সংঘাতজনিত অপচয় নির্ণয় করুন। ৬

অথবা

সমতলে বক্ররেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ ও ত্বরণের সার্থক ও অভিলম্বের উপাংশ নির্ণয় করুন। ৬

- ৪। কেন্দ্রীয় বলাধীন একটি কণার কক্ষপথ-এর সমীকরণ $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$;

যদি বলকেন্দ্রটি নাভিবিন্দু হয় তবে দেখান যে ক্রিয়াশীল বলটি $\propto \frac{1}{r^2}$ ৬

অথবা

যৌগিক দোলকের সংজ্ঞা লিখুন। এর গতির সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং এর ক্ষুদ্রতম দোলনকাল নির্ণয় করুন। ৬

- ৫। একটি অমসৃণ গোলক অনুভূমিক তলের সঙ্গে ‘α’ কোণে নত একটি তলে স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করল। দেখান যে গোলকটি কখনও গড়াবে না

যদি $\mu < \frac{2}{7} \tan \alpha$ হয় (μ = ঘর্ষণাঙ্ক)। ৬

অথবা

সংরক্ষিত বল বলতে কী বোঝানো হয়? সংরক্ষিত বলের প্রভাবে চলমান একটি ঘন বস্তুর শক্তি নীতি উল্লেখ করুন। দেখান একটি দৃঢ়বস্তুর উপর প্রযুক্ত অভিকর্ষজ ভার একটি সংরক্ষিত বল। ৬

৬। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন : ৩×২=৬

(অ) বলের ঘাত ও ঘাতবল কাকে বলে? বলের ঘাতের ফলে বস্তুর গতির পরিবর্তনের সূত্রটি উল্লেখ করুন।

(আ) একটি গতিশীল কণার অরীয় বেগ যদি লম্ব-অরীয় বেগের চারগুণ হয়, তবে ওই কণার কক্ষপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(ই) কোনো কণার উল্লম্বদিশায় উর্ধ্বদিকে “ u ” বেগে ছোড়া হল; কণাটির গতিপথে সর্বদা kv^2 পরিমাণ বাধা পায়। কণাটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠতে পারবে? (v = যে-কোনো অবস্থানে কণাটির বেগ)।

৭। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন : ৩×২=৬

(অ) একটি গোলকের সঙ্গে সমানভাবে যুক্ত আর একটি গোলকের তির্যকভাবে সংঘর্ষ হল। গোলকদুটি মসৃণ ও সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হলে, দেখান যে সংঘর্ষের পর গোলকদুটির পথ পরস্পর লম্ব হবে।

(আ) কণাপুঞ্জের ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি বিবৃতিসহ প্রমাণ করুন।

(ই) জাড্য ভ্রামক সম্পর্কিত সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য ও লম্ব অক্ষের উপপাদ্য বিবৃত করুন।

স্নাতক পাঠক্রম

(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠক্রম

গণিত

দশম পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

১। প্রতি বিভাগ থেকে একটি করে মোট দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন : $১০ \times ২ = ২০$

ক — বিভাগ

(অ) একগুচ্ছ অসামান্ত্রিক বল একটি দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল। ওই বলসমূহকে বস্তুর উপর যে-কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত একটি মাত্র বল ও একটি দ্বন্দ্ব পরিণত করুন। এর থেকে ওই বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকার শর্তগুলি নির্ণয় করুন।

(আ) $2l$ দৈর্ঘ্যযুক্ত এবং W ভারবিশিষ্ট একটি সুখম AB দণ্ডকে উহার দুইপ্রান্তে খুঁটির সাহায্যে আনুভূমিক অবস্থায় রাখা আছে। W' ভারবিশিষ্ট এক ব্যক্তি দণ্ডটির উপর P বিন্দুতে দণ্ডায়মান, যেখানে $AP = x$ ($< l$)। দেখান যে দুটি অধিবৃত্তের সমীকরণ দ্বারা দণ্ডটির নমন ভ্রামক নির্ণীত হয় এবং অধিবৃত্ত দুটির নাভিলম্বদ্বয় সমান।

খ — বিভাগ

(ই) কোনো তরলে ভাসমান কোনো বস্তুর পরাকেন্দ্রের অস্তিত্বের শর্ত নির্ণয় করুন। সমসত্ত্ব স্থির তরলে অভিকর্ষের দ্বারা প্রভাবিত অবাধে ভাসমান

বস্তুর যথাযথ প্রতীকচিহ্নসহ $HM = \frac{AK^2}{V}$ সূত্রটি প্রমাণ করুন।

P.T.O.

(ঈ) প্রচলিত প্রতীক ব্যবহার করে প্রমাণ করুন যে একটি সমতলীয় নিমজ্জমান

ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্র ওই ক্ষেত্রের ভরকেন্দ্রগামী অনুভূমিক রেখা হইতে $\frac{k^2}{h}$

গভীরে অবস্থিত। একটি ত্রিভুজাকৃতি-ক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের গভীরতা দেওয়া থাকলে তার চাপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় করুন।

২। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন : (প্রত্যেক বিভাগ থেকে অন্তত একটি করে প্রশ্ন নির্বাচন করতে হবে।) $৬ \times ৩ = ১৮$

ক — বিভাগ

(অ) একটি যুগ্মবলের বলদুটির প্রয়োগবিন্দু A ও B এবং তাদের ভ্রামক G ; যদি বলদুটির ক্রিয়া রেখা 90° ঘুরে যায়, তখন ওরা H ভ্রামকবিশিষ্ট যুগ্মবল গঠন করে। যখন বলদুটির ক্রিয়া রেখা AB -এর উপর লম্ব হবে, তখন দেখান যে বল দুটি $\sqrt{G^2 + H^2}$ ভ্রামক বিশিষ্ট-যুগ্মবল গঠন করে।

(আ) কোনো সমতলীয় বলগোষ্ঠীকে কখন দিক নিরপেক্ষ সাম্যে আছে বলা হয়? দিক নিরপেক্ষ সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত নির্ণয় করুন।

(ই) X, Y, Z বল যথাক্রমে $y = b, z = -c; z = c, x = -a; x = a, y = -b$ এই রেখাগুলিতে ক্রিয়া করলে দেখান যে উহাদের লব্ধি বল থাকবে যদি $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ হয়। সেইক্ষেত্রে লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা নির্ণয় করুন।

খ — বিভাগ

(ঈ) একটি বলতন্ত্রের ক্রিয়ায় একটি বিশুদ্ধ চরিত্র তরলের স্থিতি অবস্থায় থাকার শর্ত নিরূপণ করুন। দেখান যে অভিকর্ষজ বলের প্রভাবে স্থিতিবস্থায় থাকা একটি সমসত্ত্ব তরল পৃষ্ঠ অনুভূমিক হবে।

(উ) জানা ওজন ও আয়তনের একটি শঙ্কু একটি তরলে শীর্ষবিন্দু নিম্নমুখী হয়ে ভেসে আছে; দেখান যে তরলের সাথে পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল সর্বনিম্ন হবে

যখন শঙ্কুর উর্ধ্বকোণের মান $2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ হবে।

(3)

EMT-10

(উ) শীর্ষকোণ 2α যুক্ত একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু ঠিক জলতলের নীচে নিমজ্জিত আছে। এর একটি জেনারেটর জলতলে আছে। প্রমাণ করুন বক্রতলের উপর লব্ধিঘাত এবং শঙ্কু কর্তৃক অপসারিত জলের ওজনের অনুপাত হল $\sqrt{1+3\sin^2 \alpha} : 1$ এবং তা শঙ্কু অক্ষের সাথে $\cot^{-1}(2\tan\alpha)$ কোণে আনত থাকে।

৩। প্রত্যেক বিভাগ থেকে দুটি করে মোট চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

৩×৪=১২

ক — বিভাগ

(অ) লামির উপপাদ্যটি বিবৃতিসহ প্রমাণ করুন।

(আ) দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল P এবং Q ($P > Q$) কোনো দৃঢ় বস্তুর দুটি বিন্দু A এবং B তে ক্রিয়া করে। P ও Q পরস্পর স্থান বিনিময় করলে, দেখান যে লব্ধির প্রয়োগ বিন্দু AB বরাবর d পরিমাণ দূরে সরে যাবে যেখানে

$$\frac{d}{AB} = \frac{P-Q}{P+Q}.$$

(ই) xy -তলে একটি বলযুগ্মের 10 এককের একটি বল $2x + 3y = 6$ রেখা বরাবর ত্রিযাশীল বলযুগ্মের ভ্রামক 40 একক z -অক্ষের দিকে হলে বলযুগ্মের অপর বলের ত্রিয়ারেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(ঈ) একটি অসম সূত্র অভিকর্ষের অধীন ঝুলছে। সূত্রটির কোনো বিন্দুতে প্রস্তুচ্ছেদ ওই বিন্দুর টানের ব্যস্ত সমানুপাতী। প্রমাণ করুন যে সূত্রটি একটি অধিবৃত্তের আকারে ঝুলছে।

খ — বিভাগ

(উ) বায়বীয় পদার্থের সংকোচন প্রক্রিয়ায় সমোষ্ণ পরিবর্তনে কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

(উ) একটি কাঠের বল জলে ভাসছে। প্রমাণ করুন যে সাম্যাবস্থাটি অস্থির হবে যদি এর যে-কোনো পরিমাপের ছোটো ওজন বলটির সর্বোচ্চ বিন্দুতে রাখা হয়।

P.T.O.

EMT-10

(4)

(ঋ) h দৈর্ঘ্য এবং a ব্যাসযুক্ত এবং σ আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট একটি সমসত্ত্ব বৃত্তাকার চোঙ জলে ভাসছে। প্রমাণ করুন যদি অক্ষটি উল্লম্ব অবস্থায় এটি সুস্থিত হয়, তাহলে

$$\frac{\sigma^2}{h^2} > 2(1-s)s.$$

(৯) একটি তরলে নিমজ্জিত একটি ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দু কার্যকরী তলে অবস্থিত এবং বিপরীত বাহুটি অনুভূমিক। ত্রিভুজটির চাপকেন্দ্র নির্ণয় করুন।

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

একাদশ পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক
(পূর্ণমান — ২৫)

১। (অ) কোনো একটি ত্রিভুজের অপেক্ষকের ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ণয় করার সাধারণ সূত্রটি ব্যাখ্যা করুন। ৩

(আ) দুটি রাশি $P = 41.52$ ও $Q = 28.01$ তিনটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত মাপা হয়। $P + Q$ -এর সাংখ্যিক গণনার ভ্রান্তি নির্ণয় করুন। ৪

অথবা

সংজ্ঞা দিন : নির্ভুল এবং সমীপস্থ সংখ্যা, আসন্নীকরণ ভ্রান্তি $\sqrt{20}$ -এর মান নির্ণয়ে কতঘর দশমিক স্থান পর্যন্ত নিতে হবে যাতে ভ্রান্তির পরিমাণ ০.১%-এর বেশি না হয়? ৭

২। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন : ৬×৩

(অ) (i) দেখান যে

$$E^n f(x) = \left[1 + n_{c_1} \Delta + n_{c_2} \Delta^2 + \dots + \Delta^n \right] f(x)$$

$$(ii) \Delta f(x)g(x) = f(x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$$

P.T.O.

(আ) (i) নীচের সারণির একটি অগ্রান্তর সারণি প্রস্তুত করুন।

x	0	10	20	30	40
$f(x)$	0	.34	.68	1.02	1.36

(ii) $y = x^2 + 2x$ অপেক্ষকে $x = 0, 1, 2, 3, 4$ -এর জন্য একটি পশ্চাদ অস্তর সারণি প্রস্তুত করুন।

(ই) নিউটনের অগ্রান্তর আন্তঃপাঠন সূত্রটির সুবিধা-অসুবিধা যথাযথ উদাহরণসহকারে যাচাই করুন।

(ঈ) নীচের সারণি থেকে $f(x)$ কে বহুপদ রাশি ধরে এর মান নির্ণয় করুন।

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	11	34

(উ) বিপরীত আন্তঃপাঠন প্রক্রিয়াটি ব্যাখ্যা করুন। এর সাহায্যে নীচের সারণি থেকে x -এর মান নির্ণয় করুন যখন $y = 19$

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	20

(উ) সিম্পসনের সূত্র ব্যবহার করে $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} dx$ -এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় করুন।

বিভাগ — খ
(পূর্ণমান — ২৫)

৩। (অ) বীজগাণিতিক সমীকরণের সমাধানের জন্য সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করুন। এই পদ্ধতির সুবিধা-অসুবিধাগুলি উল্লেখ করুন। ৭

অথবা

(আ) পৌনঃপুনিক পদ্ধতিতে $x^3 - 9x + 1 = 0$ -এর ধনাত্মক বীজগুলি নির্ণয় করুন। ৭

৪। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৬×৩

- (অ) গাউস জর্ডন পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির ব্যস্ত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

- (আ) ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্টমান, বিশিষ্ট ভেক্টর ও বিশিষ্ট সমীকরণ-এর সংজ্ঞা দিন। সংক্ষিপ্ত উদাহরণযোগে এদের ব্যাখ্যা করুন।
- (ই) গাউসের অপনয়ন পদ্ধতিতে নীচের সমীকরণটি সমাধান করুন।
(আসন্ন দু দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$$4x + 6y + 2z = 9$$

$$y + 5z = 1.5$$

$$-7x + z = -5.5$$

- (ঈ) গাউস সাইডেল পদ্ধতির অভিসরণ কীভাবে নির্ণয় করা যায় ব্যাখ্যা করুন। সংক্ষিপ্ত উদাহরণ দিন।

- (উ) অয়লারের পদ্ধতি প্রয়োগ করে $\frac{dy}{dx} = x^3 + y$, $y(0)=1$ এই সমীকরণ থেকে y (0.01)-এর মান নির্ণয় করুন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত যেখানে ধাপ-দৈর্ঘ্য $h = 0.01$.

- (ঊ) চারক্রমের রুঙ্গ-কুটা পদ্ধতি প্রয়োগ করে y (1.2) নির্ণয় করুন যেখানে

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

$$y(1)=0, \quad h=0.1$$

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

দ্বাদশ পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

১০×২=২০

১। (ক) সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধাভিত্তিক সংজ্ঞা থেকে যে-কোনো দুটি ঘটনা A ও B -এর জন্য প্রমাণ করুন

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad ৫$$

(খ) একটি পাত্রে ৫টি লাল এবং ১০টি কালো বল আছে। পাত্র থেকে ৪টি বল পরপর এমনভাবে তোলা হল যে তোলা বলটি ফেরত তো দেওয়া হল এবং তার সঙ্গে তোলা বলের রংয়ের ২টি বল পাত্রে রাখা হল। ৪টি কালো বলের একটি সম্পূর্ণ শৃঙ্খলের সম্ভাবনা কত? ৫

২। (ক) যদি A_1, A_2, \dots, A_n পরস্পর অনপেক্ষ n -সংখ্যক ঘটনা হয় তাহলে প্রমাণ করুন

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)] \quad ৫$$

P.T.O.

(খ) একটি ছক্কা n বার ছুড়লে “একটি প্রদত্ত সংখ্যা i হবে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলির ক্ষুদ্রতম” এই ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। ৫

৩। (ক) দুই ব্যক্তি A এবং B স্থির করে যে তারা একটি পূর্বনির্দিষ্ট স্থানে দুপুর ১২টা থেকে বেলা ১টার মধ্যে পরস্পরের সহিত দেখা করবে। যে আগে সেই স্থানে আসবে সে অপরের সহিত দেখা করার জন্য ঠিক ২০ মিনিট অপেক্ষা করবার পর চলে যাবে। যদি A এবং B -র নির্দিষ্ট স্থানে উপস্থিত হবার সময় অনপেক্ষ সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক হয় তবে নির্দিষ্ট ১ ঘণ্টার মধ্যে তাদের পরস্পরের দেখা হবার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। ৫

(খ) সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক X -এর নিবেশনের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক f নীচে প্রদত্ত হল :

$$f(x) = 0.5 \cos x, \text{ যখন } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$$

$$= 0, \quad \text{অন্যত্র।}$$

$Y = \sin X$ হলে, Y চলকের গড় এবং ভেদমান নির্ণয় করুন। ৫

৪। (ক) দেখান যে দ্বিচল নর্ম্যাল নিবেশনের নির্ভরণ রেখাগুলি (regression curves) সরলরেখা হবে। ৫

(খ) চেবিশেফের অসমতা ব্যবহার করে $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - 3.5\right| > \frac{1}{2}\right)$ -এর উর্ধ্বসীমা নির্ণয় করুন যেখানে X_n হল একটি প্রতিসম ছক্কা n বার নিক্ষেপের ফলে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলির যোগফলের অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৬×৩=১৮

৫। X, Y দুটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চলকের যৌথ ঘনত্ব অপেক্ষক f নীচে উল্লেখ করা হল :

$$f(x, y) = K(1 - x - y), \text{ যখন } x \geq 0, y \geq 0 \text{ এবং } x + y \leq 1;$$

$$= 0 \quad \text{অন্যত্র।}$$

[K একটি ধ্রুবক]

(i) K -এর মান নির্ণয় করুন।

(ii) X ও Y -এর প্রান্তিক ঘনত্ব অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং X, Y অনপেক্ষ কিনা পরীক্ষা করুন। ৬

৬। দ্বিপদ নিবেশনের পুনরুৎপাদন ধর্মটি বিবৃতিসহ প্রমাণ করুন। ৬

৭। একটি বিচ্ছিন্ন চলক X -এর বর্ণালীর বিন্দুগুলি হল

1, 2, n এবং

$X = i$ ঘটনার সম্ভাবনা $\frac{1}{e(i+1)}$ - এর সমানুপাতিক।

X -এর নিবেশন অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং এর থেকে $P(3 < X \leq n)$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৬

৮। সমান নিবেশনের ক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্যটি বিবৃতিসহ প্রমাণ করুন। ৬

৯। যদি X_1, X_2, \dots, X_n পরস্পর অনপেক্ষ n টি নর্মাল $(0, 1)$ চলক হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ একটি χ^2 চলক যার স্বাভাবিক মাত্রা $= n$ ৬

১০। দুটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক X, Y অনপেক্ষ এবং উভয়ই $(0, 1)$ অন্তরে সমবিস্তৃত। $X + Y$ চলকটির ঘনত্ব অপেক্ষক নির্ণয় করুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৩×৪=১২

১১। A, B যে-কোনো দুটি ঘটনা হলে দেখান যে

$$P(AB) - P(A)P(B)$$

$$= P(\bar{A})P(B) - P(\bar{A}B)$$

৩

১২। যদি $\{A_n\}_n$ একটি একাধারে প্রসারণশীল ঘটনার ক্রম হয় তাহলে প্রমাণ

$$\text{করুন } P(\lim A_n) = \lim P(A_n) \text{।}$$

৩

P.T.O.

১৩। একটি পক্ষপাতদুষ্ট মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করে ‘হেড’ পাবার সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$ । মুদ্রাটি 10 বার নিক্ষেপ হলে ‘হেড’-এর সংখ্যার সর্বাধিক সম্ভাব্যমান নির্ণয় করুন। ৩

১৪। যদি X একটি পোয়াসন-3 চলক হয় তাহলে দেখান যে

$$P(|X - 3| < 1) = \frac{9}{2e^3}$$

৩

১৫। একটি ব্রিজ খেলায় উত্তর ও দক্ষিণ খেলোয়াড়দের হাতে 9টি ইঞ্চিপনের তাস আছে। পূর্ব বা পশ্চিম খেলোয়াড়ের হাতে ইঞ্চিপনের তাস না থাকার সম্ভাবনা কত? ৩

১৬। যদি X, Y সম্ভাবনাশ্রয়ী অনপেক্ষ চলক হয় তাহলে প্রমাণ করুন $\rho(X, Y) = 0$ বিপরীতটি কি সত্য? উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দিন। ৩

১৭। বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের সীমা উপপাদ্য বিবৃত করুন। প্রয়োজনীয় শর্ত উল্লেখ করে প্রমাণ করুন যে দ্বিপদ নিবেশন সীমায় পোয়াসন নিবেশনের প্রতি অভিসারী হয়। ৩

১৮। যদি A, B ঘটনাদুটির জন্য $P(A) + P(B) = 2$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন A, B উভয়ই সম্ভাবনাত্মকভাবে নিশ্চিত ঘটনা। ৩

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

ত্রয়োদশ পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন : $১০ \times ২ = ২০$

১। যদি কোনো সমসত্ত্ব নমুনার প্রসার এবং সমক বিচ্যুতি যথাক্রমে R এবং

S হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে $S^2 \leq \frac{R^2}{4}$ ১০

২। (ক) কোনো সম্ভাব্য চলক X এবং সম্ভাবনা ঘনত্ব-অপেক্ষক $f(x)$ নিম্নে প্রদত্ত হল :

$$f(x) = 2xe^{-x^2} \text{ যখন } x > 0 \\ = 0 \text{ অন্যত্র।}$$

X -এর ক্রমযৌগিক নিবেশন অপেক্ষক এবং X^2 -এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

(খ) একটি বিচ্ছিন্ন ও একটি অবিচ্ছিন্ন পূর্ণক থেকে নেওয়া সম্ভাবনাশ্রয়ী নমুনার আশংসা অপেক্ষকের সংজ্ঞা দিন। ৫+৫=১০

৩। (ক) একটি নর্মাল নিবেশন থেকে ১০ আকারবিশিষ্ট একটি নমুনা চয়ন করা হল। নমুনার মানগুলি (ইধিতে) হল : 64, 68, 67, 64, 71, 63,

P.T.O.

65, 71, 69, 70 ; নমুনাটির ভেদমান 7.056 বর্গইধি।
“সমগ্রকের গড় 69 ইধি”—এই প্রকল্পটি বিচার করুন।

(খ) সাযুজ্যতার উৎকর্ষের χ^2 বিচার কোন্ প্রকার প্রকল্পে ব্যবহার করা হয়? ওকে কেন পূর্ণকাক্ষবিহীন বলা হয়। ৫+৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন : $৬ \times ৩ = ১৮$

৪। (ক) নীচে প্রদত্ত তথ্যে লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতির প্রয়োগে $y = a + bx$ আকারের একটি সরলরেখা নির্ণয় করুন।

$x :$	10	20	30	40	50
$y :$	5.0	6.2	7.4	8.2	9.0

এখান থেকে নমুনালব্ধ সহগাঙ্ক-এর মান নির্ণয় করুন। ৬

(খ) একটি লুডোর ছক্কে 60 বার নিক্ষেপণের ফল নীচে দেওয়া হল :

প্রাপ্ত সংখ্যা :	1	2	3	4	5	6
পরিসংখ্যা :	6	10	8	13	11	12

উপরের তালিকা হতে ছক্কাটিকে পক্ষপাত-শূন্য বলা যায় কিনা বিচার করুন। (প্রদত্ত আছে $\chi^2_{0.01} = 15.09$ স্বতন্ত্রমাত্রা 5-এর জন্য) ৬

(গ) দেখান যে নর্মাল সমগ্রক (m, σ) -এর জন্য $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ নমুনাক্ষের নমুনাজ নিবেশন $(n - 1)$ স্বাভাবিকমাত্রায়ুক্ত χ^2 হবে যখন n , s^2 এবং σ^2 যথাক্রমে নমুনা আয়তন, নমুনা ভেদমান এবং সমগ্রক ভেদমানকে সূচিত করে। ৬

(ঘ) একটি বড়ো মজুত ভাণ্ডার থেকে সমসত্ত্ব উপায়ে নির্বাচিত 400টি আমের মধ্যে দেখা গেল 53টি খারাপ। গড়ে আমগুলির 10% খারাপ ছিল। এই প্রকল্পটি 1% সংশয়মাত্রায় বিচার করুন।

দেওয়া আছে $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2.58}^8 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.005$ ৬

(3)

EMT-13

- (ঙ) কোনো বিদ্যালয়ের ছাত্রদের উচ্চতার নিবেশনটি নর্ম্যাল নিবেশন, যার পূর্ণকের ভেদমান 6.1504 ইঞ্চি, 100 জন ছাত্রের একটি সমসম্ভব নমুনা গ্রহণ করে দেখা গেল নমুনা গড় 68.52 ইঞ্চি। ছাত্রদের গড় উচ্চতার 98% অন্তর প্রাক্কলন করুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন : $৩ \times ৪ = ১২$

- ৫। (ক) যদি নর্ম্যাল সমগ্রক $(\mu, 1)$ থেকে নেওয়া (x_1, x_2, \dots, x_n) একটি

সমসম্ভব নমুনা হয়, তাহলে দেখান যে $t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ নমুনাঙ্ক,

$\mu^2 + 1$ -এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলনী মান হবে। ৩

- (খ) 12 জোড়া পর্যবেক্ষণলব্ধ রাশিতথ্য থেকে x ও y চলকদ্বয়ের মধ্যে সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয়ের সময় নীচের ফলগুলি পাওয়া গেল :

$$n = 12, \Sigma x = 30, \Sigma y = 5, \Sigma x^2 = 670, \Sigma y^2 = 285, \Sigma xy = 334.$$

পরবর্তীকালে দেখা গেল যে, একজোড়া মান ভুল করে $(x = 11, y = 4)$ লেখা হয়েছে, যেখানে সঠিক মান ছিল $(x = 10, y = 14)$ । সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের সঠিক মান নির্ণয় করুন। ৩

- (গ) নীচের বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন :

বয়স 5-14 15-24 25-34 35-44 45-54 55-64 65-74

দুর্ঘটনায় মৃতের

সংখ্যা 5 8 15 13 25 9 5

৩

- (ঘ) প্রদত্ত ঘনত্ব অপেক্ষকের ভেদমান নির্ণয় করুন :

$$f(x) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x}{a}\right), \quad 0 < x < \infty$$

= 0 অন্যত্র। ৩

P.T.O.

EMT-13

(4)

- (ঙ) নীচে দুজন ব্যাটসম্যান A ও B-এর কোনো মরশুমে পরপর দশ ইনিংসে রানের স্কোর দেওয়া হল :

A 32 28 47 63 71 39 10 60 96 14

B 19 31 48 53 67 90 10 62 40 80

রানের ক্ষেত্রে কোন্ ব্যাটসম্যান বেশি সংগতিপূর্ণ তা নির্ণয় করুন। ৩

- (চ) দেখান যে সমক বিচ্যুতি মূলবিন্দুর পরিবর্তন নিরপেক্ষ এবং মাত্রার পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল। ৩

স্নাতক পাঠ্যক্রম
(বি. ডি. পি.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা — ডিসেম্বর, ২০০৮

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম

গণিত

চতুর্দশ পত্র

সময় : দুই ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৫০

মানের গুরুত্ব : ৭০%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

১০×২=২০

- ১। (ক) এক ব্যক্তির বাগানের জন্য তিন প্রকারের রাসায়নিক পদার্থ A , B ও C -এর যথাক্রমে 10, 12 ও 12 একক প্রয়োজন। প্রতি পাত্র তরল পদার্থে A , B ও C রাসায়নিকগুলি যথাক্রমে 3, 2, ও 1 একক বর্তমান। প্রতি প্যাকেট শুষ্ক পদার্থে A , B ও C যথাক্রমে 1, 2 ও 4 একক আছে। প্রতি পাত্র তরল পদার্থ 3.00 টাকা দরে এবং প্রতি প্যাকেট শুষ্ক পদার্থ 2.00 টাকা দরে বিক্রয় হয়। ব্যক্তিটি বাগানের জন্য ন্যূনতম অর্থ ব্যয় করবেন। এই সমস্যাটিকে একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যারূপে প্রকাশ করুন। ৫

P.T.O.

- (খ) লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নোক্ত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির প্রান্তিক বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন ও সমাধান করুন :

$$\text{চরম } z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{যখন } x_1 + x_2 \leq 50,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 80,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 20,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

৫

- ২। নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটিকে স্বাভাবিক আকারে লিখুন এবং Charnes Big-M পদ্ধতিতে সমাধান করুন : ৩+৭

$$\text{চরম } z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{যখন } 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2$$

$$3x_1 - 4x_2 \leq 3$$

$$x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

- ৩। (ক) প্রমাণ করুন যে, কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সকল কার্যকর সমাধানের সেট একটি উত্তল সেট। ৪

- (খ) নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির চরম সমাধান ও সংশ্লিষ্ট পরিবহন খরচ নির্ণয় করুন : ৪+২

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	1	2	1	1	30
O_2	3	3	2	1	50
O_3	4	2	5	9	20
	20	40	30	10	

- ৪। ম্যাট্রিক্সীয় ক্রীড়া সমস্যার অশ্বোপবেশন বিন্দুর সংজ্ঞা দিন। দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল ক্রীড়া সমস্যায় যদি মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের কোনো অশ্বোপবেশন বিন্দু না থাকে তাহলে প্রমাণ করুন যে সর্বদা দুই ব্যক্তিরই শ্রেষ্ঠ কৌশল আছে। ১০

(3)

EMT-14

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৬×৩=১৮

৫। প্রাধান্য তত্ত্বের ব্যবহার করে নীচের ক্রীড়া সমস্যাটি সমাধান করুন : ৬

		B			
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A	A ₁	3	2	4	0
	A ₂	2	4	2	4
	A ₃	4	2	4	0
		0	4	0	8

৬। মৌল কার্যকর সমাধানের সংজ্ঞা দিন।

১+৫

প্রমাণ করুন যে, $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$

নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1,$$

$$6x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1$$

একটি কার্যকর সমাধান। ওই কার্যকর সমাধানকে একটি মৌল কার্যকর সমাধানে রূপান্তরিত করুন।

৭। নিম্নলিখিত ভ্রাম্যমান বিক্রোতা সমস্যাটির সমাধান করুন :

	1	2	3	4
1	∞	10	20	3
2	8	∞	5	2
3	9	10	∞	12
4	5	16	11	∞

৬

৮। সর্বনিম্ন খরচ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত অসমতাপূর্ণ আরোপ সমস্যাটি সমাধান করুন :

	A	B	C	D
1	18	24	28	32
2	8	13	17	19
3	10	15	19	22

P.T.O.

EMT-14

(4)

৯। নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন এবং সমাধান করুন :

$$\text{অবম } z = 3x_1 + x_2$$

$$\text{যখন } 2x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

১০। প্রমাণ করুন যে প্রতিটি পরিবহন সমস্যার একটি কার্যকর সমাধান আছে।

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

৪×৩=১২

১১। প্রমাণ করুন যে $(1, -2, 3, 4), (-2, 4, -1, -3)$ এবং $(-1, 2, 7, 6)$ ভেক্টরত্রয় পরস্পর নির্ভরশীল।১২। প্রমাণ করুন যে E^2 দেশে

$$X = \{(x_1, x_2) / 9x_1^2 + 4x_2^2 \leq 36\}$$

$$\text{এবং } Y = \{(y_1, y_2) / y_1 + 2y_2 = 5\} \text{ সেট দুটি উত্তল সেট।}$$

১৩। North West Corner পদ্ধতিতে নিম্নোক্ত পরিবহন সমস্যাটির প্রাথমিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন।

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	
O ₁	2	1	3	4	30
O ₂	3	2	1	4	50
O ₃	5	2	3	8	20
	20	40	30	10	

১৪। নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি নির্ণয় করুন :

$$\text{চরম } z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\text{যখন } 5x_1 + 6x_2 - x_3 \leq 3$$

$$-2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 4$$

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 1$$

$$-3x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

১৫। নিম্নোক্ত রৈখিক প্রোগ্রাম সমস্যাটিতে শিথিল ও উদ্ভূত চল ব্যবহার করে আদর্শ সমীকরণ রূপে প্রকাশ করুন :

$$\text{চরম } z = 2x_1 - 3x_2$$

$$\text{যখন } 2x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$$3x_1 + 8x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

১৬। চারটি মেশিন চালানোর জন্য চারজন অপারেটর নিয়োগ করা হবে। কোন্ মেশিনে কোন্ অপারেটর নিয়োগ করলে খরচ কী হবে তা নীচে (টাকার হিসাবে) দেওয়া হল। কাকে কোথায় নিয়োগ করলে মোট খরচ সর্বনিম্ন হবে নির্ণয় করুন :

		মেশিন			
		1	2	3	4
অপারেটর	A	18	26	17	11
	B	13	28	14	26
	C	38	19	18	15
	D	19	26	24	10

১৭। নিম্নোক্ত ত্রীভুজ মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটির একটি অস্থাপবেশন বিন্দু থাকলে 'a' এর মান নির্ণয় করুন :

		B		
		I	II	III
A	I	a	5	2
	II	-1	a	-8
	III	-2	3	a

১৮। প্রমাণ করুন যে $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ ও $(0, 0, 1)$ ভেক্টরত্রয় E^3 দেশে একটি ভিত্তি গঠন করে।